

구상의 점 집합을 포함하는 소밴드와 수치제어 절삭가공의 국부적 접근성 문제

하 종 성†

요 약

본 논문에서는 구상에서 주어진 점의 집합을 포함하는 소밴드(small band)를 결정하는 문제를 다룬다. 여기서 소밴드란 같은 극(pole)을 가지는 두 개의 원으로 경계가 정해지는 구상의 영역으로 대원을 포함하지 않는 것을 의미한다. 소밴드는 3축 수치제어 절삭가공에서 국부적 접근성 문제를 구상의 포함 문제로 형식화할 때 가우징(gouging)을 피하도록 공구의 접근 방향을 고려한 결과로 나타나는 도메인(domain)의 종류이다. 또한 4축 및 5축의 경우에도 나타날 수 있다.

점의 집합 U 와 대밴드(great band)의 크기가 주어졌을 때 U 를 포함하는 하나의 대밴드와 모든 대밴드는 각각 $O(n)$ 시간과 $O(n \log n)$ 시간에 구할 수 있는 방법이 제시되어 있으며 소밴드의 경우에도 같은 방법을 적용할 수 있다. 그러나 U 를 포함하는 가장 작은 대밴드를 결정하도록 제시되어 있는 $O(n)$ 시간의 방법은 소밴드의 경우에는 해의 영역에 홀들이 있을 수 있으므로 적용할 수 없다. 본 논문에서는 U 를 포함하는 가장 작은 소밴드를 결정하는 방법을 중점적으로 고려하여 $O(n \log n)$ 시간의 알고리즘을 제시한다. 여기서 n 은 구상의 점의 개수이다.

Small Bands Enclosing a Set of Spherical Points and Local Accessibility Problems in NC Machining

Jong-Sung Ha†

ABSTRACT

This paper deals with the problem of determining small-bands enclosing a given set of points on the sphere. The small-band is a spherical region, whose boundary is composed of two circles, and which does not contain any great circle. It is a kind of domains that is derived from formalizing the local accessibility problems for 3-axis NC machining into spherical containment problems so as to avoid the gouging. It also can be generated in 4- and 5-axis machining.

When a set of points U and the size of a great-band are given, the methods for computing a feasible band and all feasible bands enclosing U in $O(n)$ and $O(n \log n)$ time have been suggested, respectively. These methods can be applied into the cases of small bands. However, the method for determining a smallest great band enclosing U cannot be applied into the cases of small bands since the solution region may contain holes. In this paper, we concentrate on the method for determining the smallest small-band enclosing U and suggest an $O(n \log n)$ time algorithm, where n is the number of points on the sphere.

1. 서 론

설계된 삼차원 모델을 주어진 제조 기법으로 제조할

수 있는지 결정하는 것은 산업자동화를 위한 CAD 및 CAM 시스템의 통합 과정에서 요구되는 매우 중요한 기하적 논증 문제이다. 설계된 물체의 형태나 공정의 방법에 따라 제조 가능성이 달라지므로 크게 두 가지의 기하적 판단 문제가 대두된다. 첫째는 설계된 모델

† 정 회 원 : 우석대학교 정보통신컴퓨터공학부 교수
논문접수 : 1999년 2월 26일, 심사완료 : 2000년 6월 27일

이 주어진 특정한 공정으로 제조가 가능한가 하는 것이고 둘째는 가능하다면 최적의 공정은 어떠한 것인가 하는 것이다. 이와 같은 기하적 논증으로 설계를 반복하여 개선하는 개념을 DFM(Design for Manufacturability)[1]라고 부르기도 한다.

본 논문에서는 설계된 기계 부품을 직접 정밀하게 가공하거나 플라스틱 사출을 위한 금형을 가공할 때 가장 많이 사용되는 수치제어(NC, Numerically Controlled) 절삭가공의 제조 방법에서 발생하는 하나의 기하적 논증 문제를 고려한다. 이 제조 방식에서는 설계된 부품의 표면과 셋업(setup) 형태에 따라 공구가 접근하는 각도가 달라진다. 따라서 공정 효과를 극대화하거나 정밀도를 향상시키도록 셋업 방향, 즉 공구의 접근 방향을 결정하여야 한다. 이를 공구의 접근성(accessibility) 문제라 한다.

공구의 접근 방향을 기존의 연구들[3, 5, 6]보다 효율적으로 결정하기 위하여 구상에서 이산적인 기하적 문제로 형식화하여 해결하는 연구들[2, 10-12]이 제시되었다. [11, 12]에서는 국부적 접근성 문제를 구상에서 주어진 점의 집합을 포함하는 도형을 찾는 일원화된 문제로 형식화하기 위하여 가공 환경을 구상에서 원들로 경계가 이루어진 도메인(domain)으로 사상시켰다. 가공 환경에는 공구의 이동 자유도, 공구의 종류, 공구 기울기의 제한등이 있다. 이렇게 사상된 대표적인 도메인으로는 각각 하나, 둘, 네 개의 원으로 경계가 이루어진 디스크(disk), 밴드(band), 섹션(section)등이 있다. 한편 면으로 근사된 가공해야 할 자유곡면의 수직 벡터를 구상의 점으로 사상시킨다.

구상의 포함 문제는 다시 주어진 점의 집합이 어느 도메인에 포함되는가 하는 가능성을 점검하고, 최적의 도메인과 가능한 모든 도메인을 찾는 세 가지 문제로 나누어졌다. 도메인이 대원(great circle)을 포함하면 대디스크 및 대밴드 등으로 부르며 아니면 소디스크 및 소밴드라고 부르는데, 소디스크와 대밴드인 경우 그 가능성을 점검하고 최적 도메인의 해를 찾는 것은 $O(n)$ 시간에 가능하며[10, 11] 모든 도메인의 해는 $O(n \log n)$ 시간에 찾을 수 있다[12].

본 논문에서는 도메인이 소밴드인 경우에 가능성을 체크하고 모든 해를 구하는 것은 대밴드인 경우와 유사함을 설명하고 최적의 해를 구하는 $O(n \log n)$ 시간의 알고리즘을 제시한다.

2절에서는 앞으로 사용될 표현을 먼저 정의하고 3절

에서는 국부적 접근성 문제의 형식화 과정을 간략히 살펴본다. 4절에서는 도메인이 소밴드인 경우에 주어진 점의 집합을 포함하는 세 가지 종류의 문제에 대한 해결 방법을 설명한다. 5절에서는 지금까지 도메인별로 연구된 결과를 표로 정리하고 수치제어 절삭가공에서 이 연구가 속하는 범위를 언급한다.

2. 구상의 기하적 요소

앞으로 논의의 전개에 사용될 표현들을 [11, 12]에서와 같이 먼저 정의한다. E^d 는 d 차원 유클리드공간이고 $p = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ 는 E^d 상의 한 점이다. 그러면 카티션 좌표계의 원점에 중심이 있는 단위구의 표면공간은 $S^{d-1} = \{p \mid \|p\| = 1\}$ 로 나타내어진다.

S^2 상의 한 점 p 는 E^3 상의 단위벡터이다.

S^2 상의 원(circle) $Cr(p, \theta)$ 은 단위구와 평면과의 교차로 정해진다. 만약에 이 평면이 원점을 지나면 대원, 그렇지 않으면 소원이라 한다. 원 $Cr(p, \theta)$ 은 다음과 같은 S^2 상의 점의 집합이다.

$$Cr(p, \theta) = \{x \mid p \cdot x = \cos \theta\}$$

S^2 상에서 원으로 경계지워지는 영역을 도메인(domain)이라 하는데 국부적 접근성 문제에서 나타나는 도메인의 종류로는 다음과 같은 것들이 있다.

디스크(disk) $Ds(p, \theta)$ 는 S^2 상의 점의 집합으로 다음과 같이 정의된다.

$$Ds(p, \theta) = \{x \mid p \cdot x \geq \cos \theta\}$$

θ 가 π 일 때 $Ds(p, \theta)$ 는 구의 전체 표면인 S^2 이다. θ 의 값에 따라서 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 일 때 대디스크(great disk),

θ 가 $\frac{\pi}{2}$ 이면 반구(hemisphere), $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때 소디스크(small disk)라 한다.

밴드(band) $Bn(p, \theta_u, \theta_l)$ 는 다음과 같은 S^2 상의 점의 집합이다.

$$Bn(p, \theta_u, \theta_l) = \{x \mid \cos \theta_l \leq p \cdot x \leq \cos \theta_u\}$$

$\theta_l > \frac{\pi}{2}$ 이고 $\theta_u < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 즉 밴드가 대원을 포함하면 대밴드(great band), 그렇지 않으면 소밴드(small

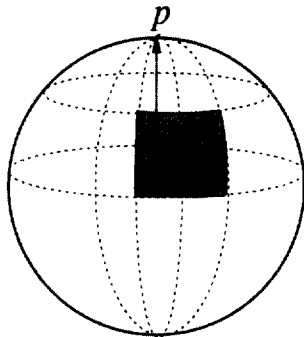
band)라 한다.

섹션(section) $Sc(p, \theta_u, \theta_l, q_1, q_2, f)$ 은 다음과 같은 도메인이다.

$$Sc(p, \theta_u, \theta_l, q_1, q_2, f) = Bn(p, \theta_u, \theta_l) \cap Ds(q_1, \frac{\pi}{2}) \cap Ds(q_2, \frac{\pi}{2}),$$

where $q_1, q_2, f \in Cr(p, \frac{\pi}{2})$ and $p \cdot f = 0$

(그림 1)에서와 볼 수 있는 바와 같이 섹션의 경계를 이루는 두 대원은 지구의 경도로, 다른 두 소원은 지구의 위도로 각각 비유해 볼 수 있다. 또한 p 는 북극점으로 비유할 수 있다. 따라서 $Cr(p, \theta)$, $Ds(p, \theta)$, $Bn(p, \theta_u, \theta_l)$, $Sc(p, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2, f)$ 등에서 p 를 그들의 극(pole)이라 한다.



(그림 1) 섹션 도메인

S^2 상의 임의의 두 점 p, q 에 대하여 p, q 를 S^2 상에서 최단으로 잇는 점의 집합을 대원(great arc)라 한다. 이 현은 어떠한 대원 $Cr(p, \frac{\pi}{2})$ 의 일부분이다. 소원(small arc)는 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ 인 경우인 소원 $Cr(p, \theta)$ 의 일부분이다. S^2 상의 점의 집합 U 에 속하는 임의의 두 점 p, q 를 잇는 대원 pq 가 완전히 U 안에 있을 때 U 가 볼록하다고 한다.

3. 국부적 접근성 문제의 형식화

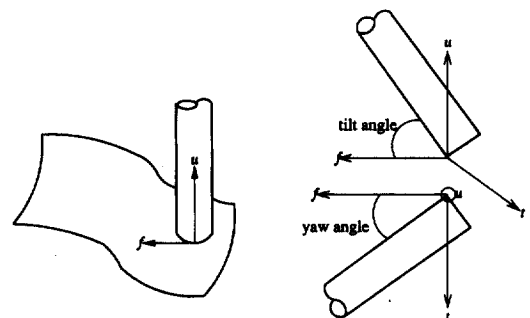
공구가 주어진 표면에 접근할 수 있는가 하는 것은 표면의 가시성(visibility)와 깊은 관계가 있다. 표면의 수직벡터와 90° 이내의 각도에서 가시적이며 공구의 접근 각도에 아무 제약이 없는 3축의 경우 이 가시성과

국부적 가공성은 일치한다. 일반적인 자유곡면의 경우에는 작은 평면들로 근사되었다고 가정하고 이 평면들의 수직벡터를 S^2 상의 점으로 사상시켜 이 점들의 집합을 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 라 하자. 그러면 U 를 포함하는 디스크 $Ds(p, \frac{\pi}{2})$ 를 정하면 p 방향으로 공구를 접근시킬 수 있다.

그러나 기계의 환경이나 다른 공정 요구 사항에 의하여 접근 각도에 제약이 주어지는 경우가 대부분이다. 이런 경우에도 표면의 수직벡터로 공구의 접근 각도를 표현하기 위하여 공구의 접근 제한과 이동자유도를 S^2 상의 영역으로 사상시키면 공구의 접근 방향을 구하는 것은 구상에서 어떠한 도메인이 U 를 포함하는가 결정하는 문제가 된다.

공구의 종류에 따라 θ 이내의 각도로 접근해야 하는 경우가 있는데 이 때에는 점의 집합 U 를 포함하는 소디스크 $Ds(p, \theta)$ 를 결정하면 된다.

절삭가공시 고려해야 할 다른 사항으로 표면이 오목한 곳에서 일어나는 커터와 표면의 교차이다. 이러한 교차를 가우징(gouging)이라 하는데 이 가우징을 피하기 위해서는 커터를 표면의 곡률에 비례하여 기울여야 하므로 표면에 따라 수직벡터와 커터와의 최소 각도 θ_u 를 정할 수 있다. 그러면 주어진 표면의 가우시안 사상은 S^2 상에서 소밴드 $Bn(p, \theta_u, \theta_l)$ 의 영역에 포함되어야 p 방향으로 가우징없이 가공될 수 있다.



(그림 2) 절삭가공에서 tilt 각도와 yaw 각도

커터와 표면 수직벡터사이와의 각도도 NC 공구의 진행 방향을 기준으로 제약을 둘 수도 있다. (그림 2)에서 보는 바와 같이 공구의 접근 방향에 대한 두 가지의 각도 제한이 진행 방향을 기준으로 결정된다. f_i 와 u_i 로 각각 진행 방향 벡터와 표면의 수직벡터를

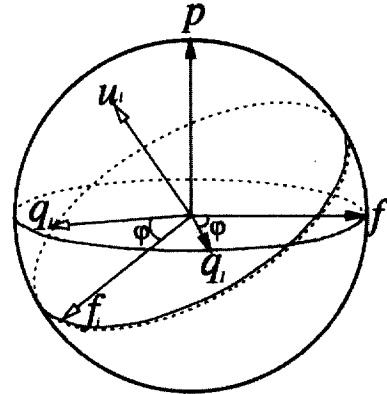
나타내자. 그러면 $t_i = u_i \times f_i$ 인 벡터 t_i 를 결정할 수 있다. 여기서 \times 는 벡터의 외적이다. 벡터 t_i 와 u_i 에 관하여 f_i 로부터 공구를 회전시킨 각을 각각 tilt 각도 그리고 yaw 각도라고 한다. 절삭가공시 공구의 충돌을 방지하고 공구의 수명을 연장시키기 위하여 이 두 각도의 범위가 주어질 수 있다.

표면을 가공할 때 위 두 각도가 주어지면 표면의 각 점 u_i 를 접근할 수 있는 공구의 각도는 하나의 소밴드와 두 개의 반구의 교차인 $Sc(u_i, \theta_u, \theta_l, q_{1i}, q_{2i}, f_i)$ 의 섹션으로 나타난다. 따라서 모든 표면을 가공할 수 있는 방향은 $\bigcap_{i=1}^n Sc(u_i, \theta_u, \theta_l, q_{1i}, q_{2i}, f_i)$ 이다. 여기서 각 점에서 공구의 상대적인 진행 방향 f_i 는 하나의 대원상에 존재하여야 한다. 왜냐하면 공구가 일정한 방향으로 진행하되 높이가 변하면서 곡면을 가공한다고 가정하면 공구좌표계의 xy 평면에 투영된 공구의 방향은 일치하여야 하기 때문이다. 그러면 아래 소정리 2에 의하여 U 가 $Sc(p, \theta_u, \theta_l, q_1, q_2, f)$ 에 포함될 때 공구를 p 방향으로 고정하고 f 방향으로 진행시키면 두 각도를 만족하면서 표면의 모든 점을 가공할 수 있다.

보조정리 1 [11]. p 를 S^2 상의 점이라 하고 $\bigcap_{i=1}^n Bn(u_i, \theta_u, \theta_l) \neq \emptyset$ 이라 가정하자. 그러면 구상의 점의 집합 U 를 포함하는 밴드 $Bn(p, \theta_u, \theta_l)$ 가 존재하면 p 는 $\bigcap_{i=1}^n Bn(u_i, \theta_u, \theta_l)$ 에 속한다. 또한 역도 성립한다.

소정리 2. p 를 S^2 상의 점이라 하고 $\bigcap_{i=1}^n Sc(u_i, \theta_u, \theta_l, q_1, q_2, f_i) \neq \emptyset$ 이라 가정하자. 그러면 구상의 점의 집합 U 를 포함하는 섹션 $Sc(p, \theta_u, \theta_l, q_1, q_2, f)$ 가 존재하면 p 는 $\bigcap_{i=1}^n Sc(u_i, \theta_u, \theta_l, q_{1i}, q_{2i}, f_i)$ 에 속한다. 또한 역도 성립한다. 단 $f \cdot f_i \leq 0, f, f_i \in Cr(p \times f, \frac{\pi}{2})$ 이다.

증명. $Sc(p, \theta_u, \theta_l, q_1, q_2, f)$ 가 U 를 포함한다고 가정하자. 그러면 섹션의 영역은 $Bn(p, \theta_u, \theta_l) \cap Ds(q_1, \frac{\pi}{2}) \cap Ds(q_2, \frac{\pi}{2})$ 으로 정의되므로 보조정리 1에 의하여 $p \in \bigcap_{i=1}^n Bn(u_i, \theta_u, \theta_l)$ 이다.



(그림 3) 소정리 2의 증명

다음은 $p \in \bigcap_{i=1}^n Ds(q_{1i}, \frac{\pi}{2})$ 을 증명하기 위하여 $p \cdot q_{1i} < 0$ 라고 가정하여 보자. 그러면 $f \cdot q_1 = \cos \phi$ 에서 $\phi < \frac{\pi}{2}$, $u_i \notin Ds(f_i, \frac{\pi}{2})$ 인 경우에 $f_i \cdot q_{1i} > 0$ 이므로 q_{1i} 는 (그림 3)에서 $Cr(p, \frac{\pi}{2})$ 의 아래 부분인 $Ds(-p, \frac{\pi}{2})$ 에 존재하므로 $u_i \in Ds(p, \frac{\pi}{2})$ 에 모순이다. 즉 $p \cdot q_{1i} \geq 0$ 이고 즉 $p \in \bigcap_{i=1}^n Ds(q_{1i}, \frac{\pi}{2})$ 이다. $\phi < \frac{\pi}{2}$, $u_i \in Ds(f_i, \frac{\pi}{2})$ 와 $\phi \geq \frac{\pi}{2}$, $u_i \notin Ds(f_i, \frac{\pi}{2})$ 및 $\phi \geq \frac{\pi}{2}$, $u_i \in Ds(f_i, \frac{\pi}{2})$ 인 나머지 세가지 경우에도 마찬가지로 모순으로 증명할 수 있다.

유사하게 $p \in \bigcap_{i=1}^n Ds(q_{2i}, \frac{\pi}{2})$ 임도 증명할 수 있다.

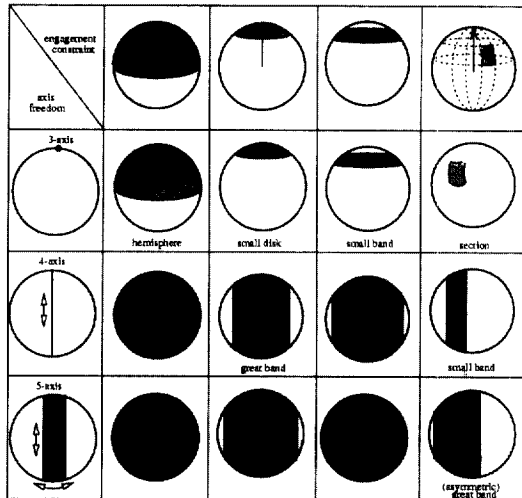
그런데 $Bn(u_i, \theta_u, \theta_l) \cap Ds(q_{1i}, \frac{\pi}{2}) \cap Ds(q_{2i}, \frac{\pi}{2})$ 은 $Sc(u_i, \theta_u, \theta_l, q_{1i}, q_{2i}, f_i)$ 이므로 $p \in \bigcap_{i=1}^n Sc(u_i, \theta_u, \theta_l, q_{1i}, q_{2i}, f_i)$ 이다.

역을 증명하기 위하여 $p \in \bigcap_{i=1}^n Sc(u_i, \theta_u, \theta_l, q_{1i}, q_{2i}, f_i)$ 라고 가정하자. 그러면 보조정리 1에 의하여 어느 원소 $u_i \in U$ 에 대하여도 $u_i \in Bn(p, \theta_u, \theta_l)$ 이다. 또한 $u_i \in Ds(q_1, \frac{\pi}{2})$ 이고 $u_i \in Ds(q_2, \frac{\pi}{2})$ 이므로 $Sc(p, \theta_u, \theta_l, q_1, q_2, f)$ 는 U 를 포함하는 섹션이다. \square

지금까지 구상에서 주어진 점의 집합을 포함하는 도메인을 구하는 일원화된 문제로 형식화된 여러 국부적 접근성 문제들은 (그림 4)에 나타내었다. 첫 행에서는 공구의 접근 방향에 대한 제약에 따라 표면의 한 점에

커터가 접근할 수 있는 방향의 영역을 종류별로 나타내었다. 첫 행에서 각 영역의 극은 주어진 한 점의 수직벡터이다. 또한 첫 열에서는 NC 기계의 종류에 따라 공구나 workpiece의 이동자유도를 사상시킨 결과이다.

본 논문에서 중점을 두는 소밴드는 3축에서 가우징을 피하도록 공구의 접근 각도에 제한이 주어지는 경우 나타난다. 4축 및 5축의 경우에는 각각 하나 및 두 개의 회전 이동을 더 가지고 있으므로 첫 행에 나타난 도메인을 회전시킨 결과인 새로운 도메인에 주어진 점의 집합이 포함되면 된다. 따라서 진행 방향에 대한 tilt 각도와 yaw 각도가 주어지는 경우에 섹션이 회전하여 4축 5축인 경우에도 소밴드의 도메인이 나타날 수 있다.



(그림 4) 커터의 기울기와 공구의 이동 자유도에 따른 도메인의 종류

예를 들어 3행 4열과 같은 소밴드 $Bn(p, \theta_u, \theta_l)$ 안에 U 가 포함되면 4축 NC 기계로 주어진 tilt 각도와 yaw 각도를 유지하면서 주어진 표면을 가공할 수 있는 것이다.

우리는 구상의 이산적인 기하 문제로 형식화된 국부적 접근 문제를 다음과 같이 세 가지로 세분화하였다.

첫째, 점의 집합 U 가 도메인 D 에 포함되는지 결정하는 F-문제 (Check the feasibility),

둘째, U 가 D 에 포함되는 모든 도메인을 구하는 A-문제 (Find all solutions),

셋째, U 를 포함하는 최적의 D 를 구하는 O-문제 (Find an optimal solution)이다.

여기에서 최적의 해는 flat-end의 기울기에 따라 가공 후 남는 커슥(cusp)의 높이가 달라지는 특성으로부터 동기가 되었다. ball-end인 경우에는 어느 방향에서도 커슥의 높이가 같다. 그러나 flat-end의 공정 시간이 ball-end보다 약 24 배정도 빠르므로[9] 대략적인 공정은 flat-end로 하고 마무리 공정은 ball-end로 하는 경우가 많다. 따라서 flat-end로 공정한 후 남는 커슥의 높이가 작아야 전체 공정 시간이 줄어든다. 이러한 커슥의 높이를 최소화하는 해를 최적해라 정의하였다.

도메인이 소디스크와 대밴드인 경우 F-문제와 O-문제를 해결하는 $O(n)$ 시간의 알고리즘[10, 11]과 A-문제를 해결하는 $O(n \log n)$ 시간의 알고리즘[12]이 제시되어 있다. 본 논문에서는 도메인이 소밴드인 경우에 F-문제와 A-문제는 대밴드의 알고리즘을 적용하고 O-문제를 해결하는 $O(n \log n)$ 시간의 알고리즘을 제시한다.

앞으로는 편의상 $\bigcap_{i=1}^n$ 을 \cap 으로 표기한다.

4. 최적의 소밴드를 결정하는 알고리즘

보조정리 1에 의하여 주어진 점의 집합 U 를 포함하는 크기가 θ_u, θ_l 인 밴드를 결정하는 포함 문제는 동일한 크기의 n 개의 밴드의 교차 문제와 같다.

구상의 밴드 $Bn(u_i, \theta_u, \theta_l)$ 는 다음과 같은 두 평면 사이 공간에 존재한다.

$$HSp(u_i, \theta_u, \theta_l) = \{ \|x\| \cos \theta_l \leq u_i \cdot x \leq \cos \theta_u, x \in NE^3 \}$$

그러면 모든 $u_i \in U$ 에 대한 $\cap HSp(u_i, \theta_u, \theta_l)$ 는 볼록 다각형이다. 이 볼록 다각형은 대밴드의 경우 원점을 포함하고 소밴드인 경우에는 원점을 포함하지 않는다. 이 다각형을 다음과 같이 나타낸다.

$$PI(U, \theta_u, \theta_l) = \cap HSp(u_i, \theta_u, \theta_l)$$

$PI(U, \theta_u, \theta_l)$ 가 S^2 안으로 둘러싸이지 않을 때 $\cap Bn(u_i, \theta_u, \theta_l)$ 가 공집합이 아니며 역도 성립한다. 또한 $PI(U, \theta_u, \theta_l)$ 가 S^2 안으로 둘러싸이지 않을 때 $\|x\| > 1$ 이고 $x \in PI(U, \theta_u, \theta_l)$ 인 x 가 존재하므로 $PI(U, \theta_u, \theta_l)$

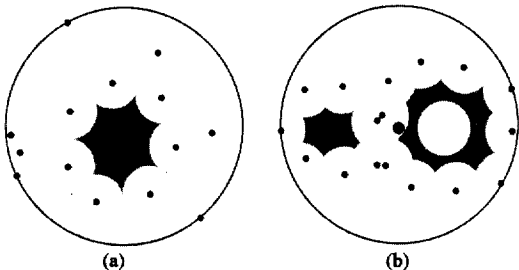
의 모든 꼭지점을 구하여 원점으로부터 거리가 I 보다 큰 꼭지점이 있는지 모두 점검하면 F-문제가 해결된다. 그러나 $PI(U, \theta_u, \theta_l)$ 를 구하는 것은 반공간(half-space)의 교차를 구하여야 하므로 $O(n \log n)$ 시간[8]이 소요된다. 보다 효율적인 방법을 사용하기 위하여 세 개의 변수를 가지는 부등식으로 나타내어지는 반공간의 교차를 다음과 같은 선형프로그래밍(LP, Linear Programming)의 확장된 기술[4, 7]을 응용하여 $O(n)$ 시간에 가능성을 점검할 수 있었다.

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \|x\|^2 \\ & \text{subject to } x \in HSp(u_i, \theta_u, \theta_l), \text{ for all } i=1 \dots n \end{aligned}$$

위의 최대화 문제에서 구해진 근을 \bar{x} 이라 하면 $\|\bar{x}\| > 1$ 일 때 U 를 포함하는 밴드가 존재한다.

대밴드의 경우 위의 최대화 문제로 구하여진 해가 극으로부터 가장 가까운 점과의 거리가 최대가 되는 최적의 해가 되었다[11]. 기하적인 의미로는 U 를 포함하는 가장 작은 대밴드를 구한 것이다. 그러나 소밴드의 경우 O-문제는 다르다.

(그림 5)에서는 도메인이 소밴드인 경우 모든 해의 경계와 최적해를 나타낸 것이다. 대밴드의 경우처럼 모든 해의 영역은 서로 떨어져서 소현으로 이루어진 한 개의 상의 구멍(hole)을 가질 수도 있다. 소밴드에서 O-문제는 U 를 포함하는 $Bn(p, \theta_u, \theta_l)$ 에서 θ_l 을 최소화하는 것으로 표현된다. 여기에서 θ_u 는 가우징을 피하는 경우 고정되어 있다.



(그림 5) 소밴드 도메인에서 모든 해의 경계와 최소 포함구

일반적으로 U 를 포함하는 가장 작은 소밴드 $Bn(p, \theta_u, \theta_l)$ 는 서로 다른 세 점에 의하여 고정된다. 그리고 이 세 점은 두 원 $Cr(p, \theta_u)$ 와 $Cr(p, \theta_l)$ 상에 존재한다. 만약에 세 점이 모두 외부 원인 $Cr(p, \theta_l)$ 에 존재

하면 U 를 포함하는 가장 작은 원을 구하면 된다. 그러나 세 점이 내부의 원과 외부의 원에 각각 하나 또는 두 개씩 분포되어 있다면 더 복잡한 문제가 된다. 대밴드의 경우에는 원점을 대칭으로 하는 두 원을 이용하여 이런 조합론적인(combinatorial) 현상을 제거하여 세 점을 하나의 원에서 찾았다. 하지만 소밴드의 경우에는 그렇지 못하므로 다른 방법을 사용하여야 한다.

(그림 3(a))는 U 를 포함하는 가장 작은 원의 극이 해의 영역에 포함되므로 U 를 포함하는 가장 작은 소밴드를 고정하는 세 점이 외부 원에 있는 경우이다. (b)는 반대의 경우로 U 를 포함하는 가장 작은 소밴드를 고정하는 세 점이 내부 원과 외부 원에 분포되어 있다. 따라서 우리는 다음과 같이 두 경우로 문제를 나눈다.

- 경우 1. U 를 포함하는 가장 작은 디스크의 극이 $\cap Bn(u_i, \theta_u, \theta_l)$ 에 속한다.
- 경우 2. U 를 포함하는 가장 작은 디스크의 극이 $\cap Bn(u_i, \theta_u, \theta_l)$ 에 속하지 않는다.

따라서 먼저 U 를 포함하는 가장 작은 디스크의 극과 $\cap Bn(u_i, \theta_u, \theta_l)$ 를 구하여 경우 1 또는 2로 구분한다. 경우 1이면 구하여진 극이 해가 된다. 경우 2에서는 모든 해의 영역에서 구하여진 극에 가장 가까운 점을 찾는다. 이러한 점은 항상 해의 경계에 존재하므로 모든 해의 경계를 구성하는 소현을 모두 점검하면 된다.

지금까지의 관찰로부터 U 를 포함하는 가장 작은 소밴드를 결정하는 알고리즘을 표현하면 다음과 같다.

Procedure OptimalSmallBand

Input : 주어진 자유곡면을 근사하는 면의 집합 (f_1, f_2, \dots, f_n) 과 소밴드의 크기 θ_u, θ_l ;

Output : 가우징을 피하고 커슴의 높이를 최소화하면서 자유곡면의 모든 점을 접근할 수 있는 공구의 방향;

$$(B_1, B_2, \dots, B_n) = \text{AllBands}((f_1, f_2, \dots, f_n), \theta_u, \theta_l)[12];$$

if $(B_1, B_2, \dots, B_n) = \emptyset$ **then** return(infeasible);

$Ds(p, \theta) = \text{OptimalDisk}((f_1, f_2, \dots, f_n)[11];$

if $p = \text{infeasible}$ or $\theta > \theta_l$ **then** return(infeasible);

for $i=1, k$ **do**

if $p \in B_i$ **then** return(p);

$p^* = \text{the point on } B_i \text{ nearest to } p$;

end for

return(p^*);

End Procedure

정리 3. 구상에서 점의 집합 U 와 소밴드의 내부 원의 크기 θ_w 이 주어지면 U 를 포함하는 가장 작은 소밴드는 $O(n \log n)$ 시간에 구할 수 있다. 여기서 n 은 모든 점의 개수이다.

(증명) 알고리즘 OptimalSmallBand()에서 AllBands()는 점의 집합 U 를 포함하는 모든 소밴드의 극을 계산한다. 이 모든 해는 (그림 5)에서처럼 소현으로 경계가 구성되어 있으며 알고리즘에서 B_i 는 한 영역의 경계를 나타낸다. 이 경계들은 $O(n \log n)$ 시간에 구성된다[12]. OptimalDisk()는 U 를 포함하는 가장 작은 원을 계산한다. 그런데 그 원의 크기가 소밴드의 외부 원보다 크다면 해가 존재하지 않는다. 그렇지 않으면 그 원의 극이 B_i 에 포함되는지 점검한다. B_i 에 포함되면 그 극이 해가 되고 그렇지 않으면 그 극은 해가 되지 못하므로 모든 해의 영역중에서 가장 가까운 점을 선택한다. 어느 점이 B_i 에 포함되는지 점검하고 그 점과 가장 가까운 점을 얻기 위해서는 B_i 의 경계를 순회하면 된다. 그런데 모든 B_i 의 경계를 구성하는 소현의 개수는 $O(n)$ 이므로 전체 시간은 모든 경계를 구성해야 하는 시간 $O(n \log n)$ 이 지배한다. □

5. 결 론

본 논문에서는 가우징을 피하면서 커승의 높이를 최소화하는 공구의 국부적 접근 방향을 구하기 위하여 구상에서 점의 집합을 포함하는 소밴드를 찾는 문제로 형식화하였다. 이 소밴드는 대밴드의 경우와는 달리 조합론적인 현상 때문에 모든 해의 경계를 구하는 과정이 필요하므로 $O(n \log n)$ 시간에 최적의 해를 결정할 수 있다. 지금까지 구상의 기하적 문제로 형식화된 공구의 국부적 접근성 문제에 대한 관련 연구들을 정리하면 <표 1>과 같다. 표에서 하나의 셀로 합쳐진 부분은 같은 알고리즘을 사용한다.

<표 1> 도메인별 국부적 접근성 결정의 시간 복잡도

	반 구	소디스크	대밴드	소밴드
F-문제	$O(n)[10]$			$O(n)[11]$
O-문제		$O(n)[10]$		$O(n \log n)^*$
A-문제	$O(n \log n)[2]$	$O(n \log n)[12]$		$O(n \log n)[12]$

마지막으로 주목할 것은 본 논문에서는 수치제어 절삭가공에서 공구의 전역적 충돌(global conflicts)은 고려하지 않았고 국부적 접근성만을 고려하였다는 것이

다. 완전한 접근성을 얻기 위해서는 공구가 다른 곡면이나 공구와 충돌하는 것을 피하여야 하는 다른 어려운 문제들을 많이 포함하고 있고 절삭 가능한 면 또는 부피등 다른 정량적인 요소들을 고려해야 하는 경우도 많이 있다.

또한 자유곡면을 면으로 근사시키거나 여러 자유곡면의 교차를 처리하는 등 수치제어 절삭가공의 전체적 과정[3, 5, 6]에 필요한 모든 문제는 다루지 않았다. 따라서 본 논문은 자유곡면을 근사시킨 면이 있다고 가정하고 공구가 면을 국부적으로 접근할 수 있는 방향을 찾는 문제를 구상의 이산적인 기하적 문제로 형식화한 것에 의의가 있으며 전체적인 수치제어 절삭가공성을 결정할 때 필요한 하나의 과정에 사용될 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] R. Bakerjian, editor, "Design for Manufacturability," *Tool and Manufacturing Engineers Handbook, Society of Manufacturing Engineers*, Vol.6, 1992.
- [2] L. L. Chen, S. Y. Chou, and T. C. Woo, "Separating and intersecting spherical polygons : computing machinability on three- four- and five-axis numerically controlled machines," *ACM Tr. on Graphics*, Vol.12, No.14, pp.305-326, 1993.
- [3] B. K. Choi, J. W. Park. and C. J. Jun, "Cutter-location data optimization in 5-axis surface machining," *Computer-Aided Design*, Vol.25, No.6, pp.377-386, 1993.
- [4] M. E. Dyer, "Linear time algorithms for two- and three-variable linear programs," *SIAM J. Computing*, Vol.13, No.1, pp.31-45, 1984.
- [5] G. Elber, "Accessibility in 5-axis milling environment," *Computer-Aided Design*, Vol.26, No.11, pp.796-802, 1994.
- [6] K. Marciniak, "Influence of surface shape on admissible tool positions in 5-axis face milling," *Computer-Aided Design*, Vol.19, No.5, pp.233-236, 1987.
- [7] N. Meggido, "Linear programming in linear time when the dimension is fixed," *J. ACM*, Vol.31, No.1, pp.114-127, 1984.
- [8] F. P. Preparata and S. J. Hong, "Convex hulls of Finite sets of points in two and three dimensions," *Comm. ACM*, Vol.2, No.20, pp.87-93, 1977.
- [9] G. W. Vickers and K. W. Quan, "Ball-mills versus

end-mills for curved surface machining," *Tr. ASME, J. Engineering for Industry*, Vol.111, pp.22-26, 1989.

- [10] 하종성, 최승학, 좌경룡, 신성용, "삼차원 부품 분해성과 기계가공성에서 최적 방향을 결정하는 선형시간 알고리즘", *정보과학회논문지(A)*, Vol.23, No.10, pp.989-997, 1996.
- [11] 하종성, 신성용, "4축 및 5축 기계가공성에서 구상의 밴드를 이용한 최적 방향의 결정", *정보과학회논문지(A)*, Vol.24, No.12, pp.1241-1246, 1997.
- [12] 하종성, "표면의 기계가공성에서 구상의 기하학을 이용한 모든 가능한 방향의 결정", *정보과학회논문지(A)*, Vol.26, No.6, pp.636-643, 1999.



하 종 성

e-mail : jsha@core.woosuk.ac.kr

1984년 서울대학교 컴퓨터공학과
졸업(학사)

1986년 한국과학기술원 전산학과
(공학석사)

1996년 한국과학기술원 전산학과
(공학박사)

1986년~1989년 현대전자산업(주) 근무

1990년~현재 우석대학교 정보통신컴퓨터공학부 부교수

관심분야 : 계산기하학, 컴퓨터그래픽스, CAD/CAM