Folded 하이퍼-스타 FHS(2n,n)의 위상적 성질 분석

김 종 석†

요 약

본 논문에서는 Folded 하이퍼-스타 FHS(2n,n)의 위상적 성질들을 분석한다. 먼저, FHS(2n,n)이 최대고장허용도를 가짐을 보이고, double rooted 스패닝 트리를 이용한 방송 수행 시간이 2n-1임을 보인다. 그리고 FHS(2n,n)이 Folded 하이퍼큐브에 연장율 1로 임베딩 가능함을 보이고, Folded 하이퍼큐브가 FHS(2n,n)에 연장율 2, 밀집율 1로 임베딩 가능함을 보인다.

키워드 : Folded 하이퍼-스타, Folded 하이퍼큐브, 연결도, 임베딩, 방송

Analysis of Topological Properties for Folded Hyper-Star FHS(2n,n)

Jong-Seok Kim†

ABSTRACT

In this paper, we analyze some topological properties of Folded Hyper-Star FHS(2n,n). First, we prove that FHS(2n,n) has maximal fault tolerance, and broadcasting time using double rooted spanning tree is 2n-1. Also we show that FHS(2n,n) can be embedded into Folded hypercube with dilation 1, and Folded hypercube can be embedded into FHS(2n,n) with dilation 2 and congestion 1.

Key Words : Folded hyper-star, Folded hypercube, connectivity, embedding, broadcasting

1. 서 론

현대 공학과 과학 분야의 대부분의 응용문제들은 많은 계산을 수행하며, 동시에 실시간 처리를 필요로 하기 때문에 지금까지의 컴퓨터 시스템보다 빠른 계산 능력을 갖는 고성능 병렬 처리 시스템에 대한 필요성이 계속 증가되고 있다. 이와 같은 병렬 시스템의 효과적인 운용을 위하여 고려해야 할 대표적인 사항 중의 하나가 연결망의 위상(topology)이다. 가장 대표적인 위상으로 하이퍼큐브(hypercube) 연결망이 있다. 하이퍼큐브 연결망은 각종 응용 분야에서 요구하는 통신망 구조를 쉽게 제공할 수 있는 장점이 있어 연구용 및 상용 시스템에 널리 사용되고 있는 대표적인 상호 연결망이다. 하이퍼큐브 연결망은 노드 및 에지 대칭성이 있고, 간단한 라우팅 알고리즘, 최대 고장 허용도, 재귀적 구조를 가지고 있으며, 기존에 제안된 다양한 상호 연결망과 쉽게 임베딩 가능하다는 장점을 가지고 있다[4,8]. 반면에 차원이 증가함에 따라 노드의 분지수 또한 그에 비례하여 증가하고, 분지수에 비해 지름과 노드간의 평균 거리가 짧지 않다는 단점이 있다. 이것은 하이퍼큐브가 에지를 효율적으로 사용하지 못함을 의미한다. 이러한 단점을 개선하기 위하여 많은 하이퍼큐브군의 상호연결망이 제안되었는데[5,6,7,10,11,12,14], 그 중 대표적인 연결망으로 Folded 하이퍼큐브가 제안되었다[12]. Folded 하이퍼큐브는 하이퍼큐브의 각 노드에 한 개의 부가적인 에지를 추가한 연결망으로, 하이퍼큐브의 지름을 1/2 개선한 연결망이다.

최근에 병렬처리를 위한 새로운 위상으로 하이퍼-스타 연결망 $HS(2n,n)$이 제안되었다[13]. 노드의 분지수가 정규형 형태를 갖는 하이퍼-스타 연결망 $HS(2n,n)$은 하이퍼큐브와 스타(star) 그래프의 성질을 가지고 있으면서, 같은 노드수를 갖는 하이퍼큐브보다 망비용(network cost)이 더욱 우수하고, 차원이 증가함에 따라 노드수가 급격하게 증가하는 스타 연결망의 단점을 개선한 연결망으로 [2,3,9,13]에서 다양한 성질들이 분석되었다. 이러한 하이퍼-스타 연결망의 지름을 1/2 개선한 Folded 하이퍼-스타가 제안되었는데, Folded 하이퍼-스타 연결망은 하이퍼-스타 연결망의 각 노드에 한 개의 부가적인 에지를 추가한 연결망으로, 여러 하이퍼큐브군의 상호연결망보다 망비용이 우수하다[13].

본 논문에서는 Folded 하이퍼-스타 FHS($2n,n$)의 연결도와 방송을 분석하고, Folded 하이퍼큐브와 Folded 하이퍼-스타 연결망 상호 간의 임베딩을 분석한다. 상호연결망을 구성하는 노드 또는 에지에서 고장이 발생하더라도 상호연결망이 연결되어 있어서 계속 동작이 가능한지를 평가하는

† 준 회 원 : 오클라호마 주립대학교 컴퓨터과학과 박사후연구원
논문접수 : 2007년 6월 24일, 심사완료 : 2007년 8월 31일

것을 연결도라고 하는데, 노드 연결도와 에지 연결도와 분지수가 같은 연결망을 최대 고장 허용도(maximal fault tolerance)를 가졌다고 한다[1]. 방송은 상호연결망을 위한 가장 기본적인 데이터 통신기법이며 병렬 알고리즘을 설계하는데 있어서 가장 기본이 되는 작업으로 노드와 노드 사이의 메시지 전송을 의미한다[8]. 임베딩은 상호연결망 G의 프로세서와 통신링크를 다른 연결망 H의 프로세서와 통신링크들로 사상하는 것으로서, 상호연결망 G에서 개발된 알고리즘을 상호연결망 H에서 효율적으로 실행시킬 수 있는지를 연구하는 분야중의 하나이다. 임베딩의 비용을 평가하는 척도는 연장율(dilation), 밀집율(congestion), 확장율(expansion) 등이 있다[1,6,7].

2장에서는 Folded 하이퍼큐브와 Folded 하이퍼-스타 그래프에 대한 정의를 알아보고, 3장에서 FHS($2n,n$)의 연결도와 방송을 분석하고, 4장에서 Folded 하이퍼큐브와 FHS($2n,n$) 사이의 임베딩을 분석하며, 마지막으로 결론을 맺는다.

2. 관련연구

L_0부터 L_t까지의 t+1개의 계층(layer)으로 구성되어 있으며, 각 계층에 포함되어 있는 모든 노드는 상위 또는 하위 계층의 노드들과 연결되어 있는 그래프를 계층 그래프(layered graph)라고 한다. 계층 그래프의 임의의 계층을 L_x라고 하면, L_{x-1} 계층은 L_x의 상위 계층이라고 하고, L_{x-2} 계층은 L_x의 2차원 상위 계층이라고 하며, L_{x+1} 계층은 L_x의 하위 계층이라고 한다. 그리고 $L_0, L_2, L_4, \ldots, L_k (0 \le k \le t)$는 짝수 계층, $L_1, L_3, L_5, \ldots, L_g (1 \le g \le t)$는 홀수 계층이라고 하며, 계층 L_0에 위치해 있는 노드를 원시노드라고 한다.

Folded 하이퍼큐브 FQ_n은 0부터 2^n-1까지의 이진수로 표현되는 2^n개의 노드들로 구성되어 있고, 각 노드는 n개의 비트스트링 $s_1s_2 \ldots s_j \ldots s_n$으로 표현되며, 이진수의 비트스트링이 정확히 한 비트가 다른 임의의 두 노드 $u=s_1s_2 \ldots s_j \ldots s_n$ 와 $v=s_1s_2 \ldots \overline{s_j} \ldots s_n$ 사이에 j-에지가 존재하며, 보수 관계에 있는 임의의 두 노드 $u=s_1s_2 \ldots s_j \ldots s_n$ 와 $w=\overline{s_1s_2 \ldots s_j \ldots s_n}$ 사이에 c-에지가 존재한다. Folded 하이퍼큐브 FQ_n에서 n개의 "0"으로 구성된 노드 s=0...0을 $s=0^n$으로 표현하겠다. Folded 하이퍼큐브는 노드 $s=0^n$를 원시노드로 갖는 계층 그래프로 표현할 수 있는데, 표현하는 방법은 다음과 같다. 노드 s와 임의의 노드 t 사이에 XOR 함수를 적용시킨 결과를 $R=r_1r_2 \ldots r_j \ldots r_n$ 이라고 하고, $\mathrm{dist}(s,t)=|r_j|(r_j=s_j \oplus t_j=1, 1 \le j \le n)$ 라고 하면, 다음과 같은 정의를 얻을 수 있다. $|r_j|$는 r_j의 개수를 나타낸다.

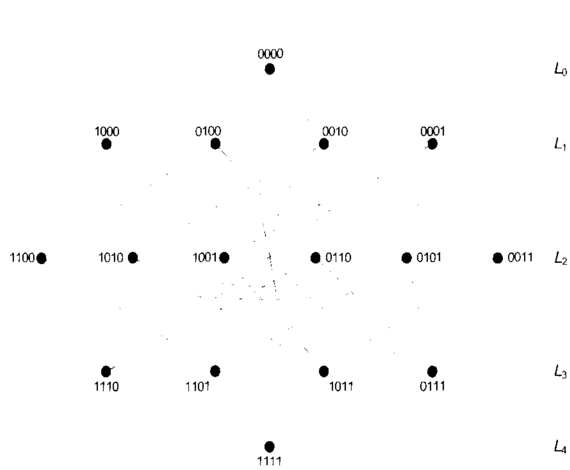
정의 1. FQ_n의 임의의 두 노드를 $s=0^n$와 v라고 하자. 만약 $\mathrm{dist}(s,v)$가 m이면, 노드 v는 계층 L_m에 위치한다.

(그림 1)은 계층그래프로 표현한 4차원 Folded 하이퍼큐브이다.

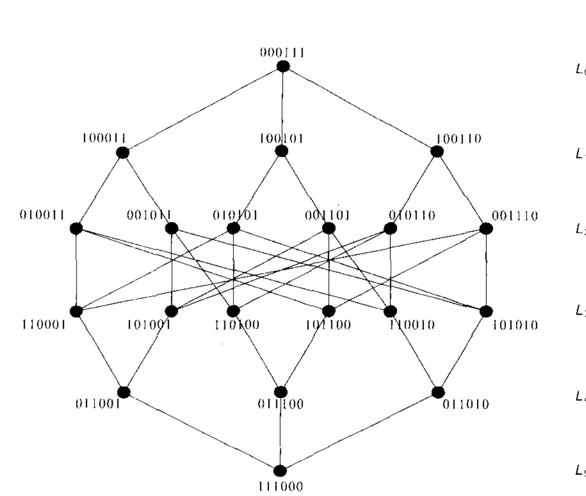
Folded 하이퍼-스타 FHS($2n,n$)는 $\binom{2n}{n}$개의 노드로 구성된 연결망으로 각 노드는 $2n$개의 비트스트링 $b_1b_2 \ldots b_i \ldots b_{2n}$으로 표현되며, $|1|=|0|=n$ 이다. b_1과 b_i가 보수일 때 b_1과 b_i를 교환하는 치환을 σ_i라 하면, $v=\sigma_i(u)$인 두 노드 $u=b_1b_2 \ldots b_i \ldots b_{2n}$와 $v=b_ib_2 \ldots b_1 \ldots b_{2n}$사이에 에지가 발생하는데 이 에지를 i-에지라고 하며, 보수 관계에 있는 두 노드 사이에 에지가 발생하는데 이 에지를 c-에지라고 한다. Folded 하이퍼-스타 FHS($2n,n$)에서 연속된 n개의 0과 1로 구성된 노드 s=0...01...1을 $s=0^n1^n$로 표현하겠다. Folded 하이퍼-스타 FHS($2n,n$)는 노드 $s=0^n1^n$를 원시노드로 갖는 계층 그래프로 표현할 수 있는데, 표현하는 방법은 다음과 같다. 노드 s와 임의의 노드 t 사이에 XOR 함수를 적용시킨 결과를 $R=r_1r_2 \ldots r_j \ldots r_{2n}$ 이라고 하고, $\mathrm{dist}(s,t)=|r_j|(r_j=s_j \oplus t_j=1, 2 \le j \le 2n)$라고 하면, 다음과 같은 정의를 얻을 수 있다.

정의 2. FHS($2n,n$)의 임의의 두 노드를 $s=0^n1^n$와 v라고 하자. 만약 $\mathrm{dist}(s,v)$가 m이면, 노드 v는 계층 L_m에 위치한다.

(그림 2)는 계층그래프로 표현한 Folded 하이퍼-스타 FHS(6,3)이다.



(그림 1) 4차원 Folded 하이퍼큐브



(그림 2) Folded 하이퍼-스타 FHS(6,3)

3. Folded 하이퍼-스타의 성질 분석

노드(에지) 연결도는 연결망을 노드 중복 없이 둘 이상의 부분으로 나누기 위해 제거해야 할 최소 노드(에지)의 개수이다. 주어진 연결망에서 임의의 k-1개 이하의 노드가 제거되더라도 연결망이 연결되어 있고, 적절한 k 개의 노드가 제거되었을 때 연결망이 분리되면 그 연결망의 연결도를 k라 한다. 노드 연결도와 에지 연결도와 분지수가 같은 연결망을 최대 고장 허용도(maximal fault tolerance)를 가졌다고 한다[1]. 연결망 G의 노드 연결도, 에지 연결도, 분지수를 각각 $k(G)$, $\lambda(G)$, 그리고 $\delta(G)$로 하고, $k(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$인 사실이 알려져 있다[1]. 정리 1에서 $k(\mathrm{FHS}(2n,n)) = \lambda(\mathrm{FHS}(2n,n)) = \delta(\mathrm{FHS}(2n,n))$임을 통하여 FHS($2n,n$)이 최대 고장 허용도를 가짐을 보인다.

정리 1. Folded 하이퍼-스타 FHS($2n,n$)는 최대 고장 허용도를 갖는다.

증명. FHS($2n,n$)의 분지수는 n+1이다[13]. 즉 임의의 노드 x에 연결되어 있는 에지수와 노드수는 n+1이다. 그러므로 임의의 노드 x에 연결되어 있는 n개의 노드 혹은 n개의 에지가 고장이 발생해도 x는 다른 노드 혹은 에지와 연결되어 있음을 쉽게 알 수 있다. 노드연결도, $k(\mathrm{FHS}(2n,n))=n+1$이고, 에지연결도, $\lambda(\mathrm{FHS}(2n,n))=n+1$이며, 분지수, $\delta(\mathrm{FHS}(2n,n))=n+1$이므로 FHS($2n,n$)는 최대 고장 허용도를 갖는다.

방송은 상호연결망을 위한 가장 기본적인 데이터 통신 기법이며 병렬 알고리즘을 설계하는데 있어서 가장 기본이 되는 작업으로 노드와 노드 사이의 메시지 전송을 의미하는데, 크게 일-대-다 방송과 다-대-다 방송으로 나눌 수 있다. 방송은 상호연결망에서 다양한 선형대수 알고리즘(matrix-vector multiplication, LU-factorization, Householder-transformations)을 포함하고 있는 많은 응용들을 위한 매우 중요한 요소이다[8]. 본 논문에서는 Folded 하이퍼-스타의 일-대-다 방송 알고리즘과 방송 수행 시간을 분석한다.

Folded 하이퍼-스타 FHS($2n,n$)의 방송을 위해 노드 $u=0^n1^n$와 $w=1^n0^n$를 정점으로 하는 double rooted 스패닝 트리를 만들겠다. double rooted 스패닝 트리를 만들기 위해 노드 $u=0^n1^n$와 $w=1^n0^n$를 연결하는 c-에지를 제외한 나머지 c-에지들을 모두 제거한다. $2n$번째 비트스트링이 0인 노드들은 $u=0^n1^n$를 정점으로 하는 하나의 서브트리 0ST를 구성하고, $2n$번째 비트스트링이 1인 노드들은 $w=1^n0^n$를 정점으로 하는 다른 하나의 서브트리 1ST를 구성한다. 임의의 노드 v가 속해 있는 계층을 L_m이라고 하자. 그러면 0ST에서는 노드 v의 상위 노드는 계층 $L_s(0 \le s < m)$에 속해 있는 노드이고, v의 하위 노드는 계층 $L_{s'}(m < s' \le 2n-1)$에 속해 있는 노드이다. 1ST에서는 노드 v의 상위 노드는 계층 $L_d(m < d \le 2n-1)$에 속해 있는 노드를 말하고, 노드 v의 하위 노드는 계층 $L_{d'}(0 \le d' < m)$에 속해 있는 노드를 말한다.

0ST는 다음과 같이 구성한다. $Pa(v)$는 노드 v의 상위 노드를 나타내는 함수라고 하고, $Ch(v)$는 노드 v의 하위 노드를 나타내는 함수라고 하자. 노드 v의 2차원 상위 노드를 $g=Pa(Pa(v))$라고 하고, $E=\{i|r_i=g_i \oplus v_i=1\}$라고 하자. v가 짝수 계층에 위치해 있는 경우에는 $i^0 \in E$과 $i^1 \in E$은 $1 \le i^0 \le n$과 $n+1 \le i^1 \le 2n-1$이고, v가 홀수 계층에 위치해 있는 경우에는 $i^0 \in E$과 $i^1 \in E$은 $1 \le i^1 \le n$과 $n+1 \le i^0 \le 2n-1$이다. 그리고 $\Psi=\{h|i^1+1, i^1+2, ..., 2n\}$ 혹은 $\Psi=\{h|i^1+1, i^1+2, ..., n\}$인 Ψ에 속하는 모든 h에 대해 $r_h=0$이다. 즉, Ψ는 R의 i^1의 위치로부터 연속적으로 0이 위치하는 집합을 나타낸다.

정의 3. 원시 노드를 노드 $u=0^n1^n$라고 할 때, $Pa(v)$과 $Ch(v)$에 의해 노드 u를 정점으로 하는 스패닝 트리 $0ST(u)$를 다음과 같이 정의한다.

$$Ch(v) = \sigma_h(v), \text{ 모든 } h \in \Psi,$$
$$Pa(v) = \sigma_{i^0}(v)$$

특히, 원시 노드 u가 v일 때는 $i^1=n$이고, $Pa(v)$는 존재하지 않으며, $i^0=1$이고, $E=\{i|r_i=u_i \oplus v_i=1\}$라고 가정한다. 그러면 v의 하위 노드는 h-에지에 의해 연결되는 노드이고, v의 상위 노드는 i^0-에지에 의해 연결되는 노드임을 쉽게 알 수 있다. (그림 3)에서 보면 L_2에 위치한 노드 010011을 v라고 할 때, v의 2차원 상위 노드는 000111이고, $E=\{2,4\}$임을 알 수 있다. 또 v가 짝수 계층에 위치해 있으므로, $i^0=2$이고 $i^1=4$이며 $\Psi=\{5\}$임을 알 수 있다. 그러므로 v의 하위 노드는 $\sigma_5(v)=110001$이며, v의 상위 노드는 $\sigma_2(v)=100011$이다.

1ST는 다음과 같이 구성한다. $Pa(v)$는 노드 v의 상위 노드를 나타내는 함수라고 하고, $Ch(v)$는 노드 v의 하위 노드를 나타내는 함수라고 하자. 노드 v의 2차원 상위 노드를 $g=Pa(Pa(v))$라고 하고, $E=\{i|r_i=g_i \oplus v_i=1\}$라고 하자. v가 짝수 계층에 위치해 있는 경우에는 $i^0 \in E$과 $i^1 \in E$은 $1 \le i^1 \le n$과 $n+1 \le i^0 \le 2n-1$이고, v가 홀수 계층에 위치해 있는 경우에는 $i^0 \in E$과 $i^1 \in E$은 $1 \le i^0 \le n$과 $n+1 \le i^1 \le 2n-1$이다. 그리고 $\Psi=\{h|i^1+1, i^1+2, ..., 2n\}$ 혹은 $\Psi=\{h|i^1+1, i^1+2, ..., n\}$인 Ψ에 속하는 모든 h에 대해 $r_h=0$이다. 즉, Ψ는 R의 i^1의 위치로부터 연속적으로 0이 위치하는 집합을 나타낸다.

정의 4. 원시 노드를 노드 $w=1^n0^n$라고 할 때, $Pa(v)$과 $Ch(v)$에 의해 노드 u를 정점으로 하는 스패닝 트리 $1ST(u)$를 다음과 같이 정의한다.

$$Ch(v) = \sigma_h(v), \text{ 모든 } h \in \Psi,$$
$$Pa(v) = \sigma_{i^0}(v)$$

특히, 원시 노드 u가 v일 때는 $i^1=n$이고, $Pa(v)$는 존재하지 않으며, $i^0=1$이고, $E=\{i|r_i=u_i \oplus v_i=1\}$라고 가정한다. 그러면 v의 하위 노드는 h-에지에 의해 연결되는 노드이고, v의 상위 노드는 i^0-에지에 의해 연결되는 노드임을 쉽게 알 수 있다. (그림 3)에서 보면 L_3에 위치한 노드 001110을 v라고 할 때, v의 2차원 상위 노드는 011100이고, $E=\{2,4\}$임을 알

수 있다. 또 υ가 짝수 계층에 위치해 있으므로, i^0=4이고 i^1=2이며 Ψ={3}임을 알 수 있다. 그러므로 υ의 하위 노드는 $\sigma_3(\upsilon)$=100110이며, υ의 상위 노드는 $\sigma_4(\upsilon)$=101010이다.

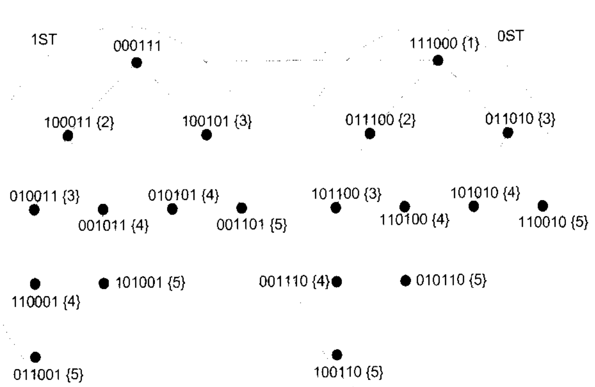
노드 $u=0^n1^n$를 원시노드로 갖는 계층 그래프 FHS($2n,n$)을 보면, 계층 L_0에는 노드 $u=0^n1^n$만이 속해 있고, 계층 L_{2n-1}에는 노드 $w=1^n0^n$만이 속해 있다. 노드 u와 노드 w는 분지수가 n이므로 n개의 인접 노드를 갖는데, 노드 u의 인접 노드 중 $2n$번째 비트스트링이 0인 노드는 계층 L_1에 속해 있는 노드 $a=10^n1^{n-1}0$만이 존재하고, 노드 w의 인접 노드 중 $2n$번째 비트스트링이 1인 노드는 계층 L_{2n-2}에 속해 있는 노드 $a'=01^n0^{n-1}1$ 오직 하나만이 존재한다. 그러므로 다음과 같은 정리를 구할 수 있다.

정리 2. 노드 $u=0^n1^n$와 $w=1^n0^n$를 정점으로 하는 double rooted 스패닝 트리 DST(u,w)의 최적 높이는 $2n$-2이다.

FHS($2n,n$)에서 double rooted 스패닝 트리를 이용하여 제시하는 일-대-다 방송 기법은 다음과 같다.

먼저 원시 노드 $u=0^n1^n$가 가지고 있는 정보 M을 c-에지를 이용하여 노드 $w=1^n0^n$에 전달한다. 그러면 노드 u와 노드 w가 정보 M을 가지고 있게 된다. 두 번째로 노드 u와 노드 w에 연결되어 있는 i-에지 중 가장 작은 i-에지에 의해 연결되어 있는 하위 노드 u_1과 w_1에 정보 M을 전달한다. 그러면 u,w,u_1,w_1이 정보 M을 가지고 있게 된다. 세 번째로 u와 w는 (i+1)-에지에 의해 연결되어 있는 하위 노드 u_2와 w_2에 정보 M을 전달하고, u_1과 w_1은 가장 작은 i-에지에 의해 연결되어 있는 하위 노드 u_{11}과 w_{11}에 정보 M을 전달한다. DST(u,w)의 모든 노드에 정보 M이 전달될 때까지 이와 같은 기법을 계속 수행한다. 제안한 방송 기법의 수행 시간은 $2n$-2(DST(u,w)의 최적 높이) + 1(c-에지 사용 회수) = $2n$-1이다. (그림 3)에 표시한 {t}는 노드가 t 시간 만에 정보를 전달받는다는 것을 나타낸다.

그래프의 임베딩(embedding)은 어떤 그래프가 다른 그래프 구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해, 어떤 특정한 그래프를 다른 그래프에 사상(mapping)하는 것이다. 그래프 G의 그래프 H에 대한 임베딩 f는 다음과 같이 정의되는 함수의 쌍(ϕ,ρ)을 말한다. ϕ는 G의 정점 집합 $V(G)$를 H의 정점 집합 $V(H)$에 대응시키는 함수이고, ρ는 G의 에지 e=(υ,w)에서 $\phi(\upsilon)$와 $\phi(w)$를 잇는 H상의 경로로 대응시키는 함수이다. 임베딩의 비용을 나타내는 척도는 연장율, 밀집율, 확장율 등이 사용되고 있다. 그래프 G의 에지 e의 연장율은 H상에서의 경로 $\rho(e)$의 길이를 말하고, 임베딩 f의 연장율은 G의 모든 에지의 연장율 중 최대값이다. 그래프 H의 에지 e'의 밀집율은 e'에 포함되는 $\rho(e)$의 개수를 말하고, 임베딩 f의 밀집율은 H의 모든 에지의 밀집율 중 최대값이다. 임베딩 f의 확장율은 G의 정점의 개수에 대한 H의 정점의 개수의 비를 말한다[1,4,7]. 본 장에서는 Folded 하이퍼큐브와 Folded 하이퍼-스타 FHS($2n,n$) 사이의 임베딩을 분석한다. 먼저, Folded 하이퍼-스타 FHS($2n,n$)이 Folded 하이퍼큐브에 연장율 1로 임베딩 가능함을 증명하고, Folded 하이퍼큐브가 Folded 하이퍼-스타 FHS($2n,n$)에 연장율 2, 밀집율 1로 임베딩 가능함을 보인다.



(그림 3) double rooted 스패닝 트리 DST(000111,111000)

정리 3. Folded 하이퍼-스타 그래프 FHS($2n,n$)는 $2n$-1 차원 Folded 하이퍼큐브에 연장율 1로 임베딩 가능하다.

증명. Folded 하이퍼-스타 그래프와 Folded 하이퍼큐브의 각 노드는 2진수 0과 1을 순서 없이, 연속적으로 나열한 형태로 표현되어 있다. Folded 하이퍼-스타 그래프 FHS($2n,n$)의 각 노드는 $2n$개의 비트스트링 $b_1b_2...b_i...b_{2n}$으로 표현되며, |0|=|1|=n 이다. i-에지에 의하여 두 노드 $u=b_1b_2...b_i...b_{2n}$과 $\upsilon=b_ib_2...b_1...b_{2n}$ 사이에 에지가 발생하며, c-에지에 의하여 두 노드 $u=b_1b_2...b_i...b_{2n}$과 $w=\overline{b_1b_2...b_i...b_{2n}}$ 사이에 에지가 발생한다. Folded 하이퍼큐브의 각 노드는 m개의 비트스트링 $a_1a_2...a_j...a_m$으로 표현되고, j-에지에 의하여 두 노드 $s=a_1a_2...a_j...a_m$과 $t=a_1a_2...\overline{a_i}...a_m$ 사이에 에지가 발생하며, c-에지에 의하여 두 노드 $s=a_1a_2...a_j...a_m$과 $q=\overline{a_1a_2...a_i...a_m}$에 에지가 발생한다. FHS($2n,n$)에서 첫 번째 비트스트링을 제거한 임의의 노드 d를 trunc(d)라고 표현하겠다. 그러면, i-에지에 의하여 연결되어 있는 두 노드는 trunc(u)=$b_2...b_i...b_{2n}(2\le i<2n)=b_1...b_i...b_{2n-1}(1\le i<2n-1)$와 trunc($\upsilon$)=$b_2...b_1...b_{2n}(2\le i<2n)=b_2...\overline{b_i}...b_{2n}=b_1...\overline{b_i}...b_{2n-1}(1\le i<2n-1)$로, c-에지에 의하여 노드 u에 연결되어 있는 노드 w는 trunc(w)=$\overline{b_2...b_i...b_{2n}}(2\le i<2n)=\overline{b_1...b_i...b_{2n-1}}(1\le i<2n-1)$로 표현할 수 있다. $m=2n-1$이라고 하자. FHS($2n,n$)의 i-에지에 의하여 연결되어 있는 두 노드 trunc(u)와 trunc(υ)와 Folded 하이퍼큐브의 j-에지에 의하여 연결되어 있는 두 노드 s와 t를 비교하여 보면 노드 표현 방법과 노드 발생 규칙이 동일함을 알 수 있다. 또한 c-에지에 의하여 연결되어 있는 FHS($2n,n$)의 두 노드 trunc(u)와 trunc(υ)와 Folded 하이퍼큐브의 두 노드 s와 q를 비교하여 보면 이 노드들 또한 노드 표현 방법과 노드 발생 규칙이 동일함을 알 수 있다. Folded 하이퍼큐브의 노드수는 2^{2n-1}이고 FHS

$(2n,n)$의 노드수는 $\binom{2n}{n}$이므로, Folded 하이퍼큐브의 노드수가 더 많음을 알 수 있다. 그러므로 Folded 하이퍼-스타 그래프 FHS$(2n,n)$는 $2n$-1차원 Folded 하이퍼큐브에 연장율 1로 임베딩 가능하다.

정리 4. Folded 하이퍼큐브는 Folded 하이퍼-스타 그래프 FHS$(2n,n)$에 연장율 2, 밀집율 1로 임베딩 가능하다.

증명. Folded 하이퍼큐브 FQ_n의 임의의 노드 $u=b_1b_2...b_n$는 n개의 비트스트링으로 구성되어 있다. 노드 u의 보수를 $\overline{u}=\overline{b_1b_2...b_n}$라고 하고, 첫 번째 비트스트링 b_1을 제거한 나머지 비트스트링 $b_2...b_n$을 t라고 표현하겠다. 증명을 위해 노드 u의 비트스트링을 $2n$으로 확장하겠다. 확장하는 방법은 노드 u의 비트스트링에 $\overline{u}$의 비트스트링을 연결하여 구성한다. 비트스트링이 $2n$으로 확장된 노드를 ex(u)라고 하면, ex$(u)=u\overline{u}=b_1b_2...b_n\overline{b_1b_2...b_n}$이며, $|0|=|1|=n$이다. Folded 하이퍼큐브 FQ_n의 에지 e를 고려하여 3가지 경우로 나누어 증명하겠다.

경우 1. 에지 e가 c-에지인 경우 : 임베딩된 ex$(v)=u\overline{u}$는 c-에지에 의해서 ex$(w)=\overline{u}u$에 연결되어 있음을 쉽게 알 수 있으므로 이 경우에는 연장율 1로 임베딩 가능하다.

경우 2. 에지 e에 연결되어 있는 두 노드의 첫 번째 비트스트링이 다른 경우 : Folded 하이퍼큐브 FQ_n의 모든 노드는 이진수로 표현되어 있으므로, 에지 e에 연결되어 있는 두 노드는 $v=0t$와 $w=1t$이다. 두 노드를 확장하면 ex$(v)=0t1\overline{t}$와 ex$(w)=1t0\overline{t}$이다. 두 노드 ex$(v)=0t1\overline{t}$와 ex$(w)=1t0\overline{t}$를 FHS$(2n,n)$에 임베딩하면 연결 경로 $\rho(e)=(0t1\overline{t}-1t0\overline{t})$이므로, $\rho(e)$의 경로 길이는 1이며, 두 노드가 인접해 있음을 쉽게 알 수 있으므로 이 경우에는 연장율 1로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우 3. 에지 e에 연결되어 있는 두 노드의 첫 번째 비트스트링이 같은 경우 : 에지 e에 연결되어 있는 두 노드를 $v=xs_10s_2$와 $w=xs_11s_2$라고 하자. x는 0 혹은 1이고, s_1과 s_2는 이진수이다$(0\leq|s_1,s_2|<n-1)$. 두 노드를 확장하면 ex$(v)=xs_10s_2\overline{xs_1}1\overline{s_2}$와 ex$(w)=xs_11s_2\overline{xs_1}0\overline{s_2}$이다. x가 0인 경우에 두 노드 ex$(v)=0s_10s_21\overline{s_1}1\overline{s_2}$와 ex$(w)=0s_11s_21\overline{s_1}0\overline{s_2}$가 FHS$(2n,n)$에 임베딩되면 두 노드의 연결 경로 $\rho(e)$는 $(0s_10s_21\overline{s_1}1\overline{s_2}-1s_10s_21\overline{s_1}0\overline{s_2}-0s_11s_21\overline{s_1}0\overline{s_2})$이고, 경로 길이는 2이다. x가 1인 경우에 두 노드 ex$(v)=1s_10s_20\overline{s_1}1\overline{s_2}$와 ex$(w)=1s_11s_20\overline{s_1}0\overline{s_2}$가 FHS$(2n,n)$에 임베딩되면 두 노드의 연결 경로는 $(1s_10s_20\overline{s_1}1\overline{s_2}-0s_11s_20\overline{s_1}1\overline{s_2}-1s_11s_20\overline{s_1}0\overline{s_2})$이고, 경로 길이는 2이다. 그러므로 이 경우에는 연장율 2로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우 3의 임베딩 된 두 노드 ex(v)와 ex(w)의 연결 경로상에 있는 노드 $1s_10s_21\overline{s_1}0\overline{s_2}$와 $0s_11s_20\overline{s_1}1\overline{s_2}$를 ex$(s)$라고 하겠다. 노드 ex$(s)$는 $s=1s_10s_2$(혹은 $0s_11s_2$)에 s의 보수인 $\overline{s}=1\overline{s_1}0\overline{s_2}$(혹은 $0\overline{s_1}1\overline{s_2}$)가 연결되어 구성된 노드이다. s와 $\overline{s}$의 비트스트링을 비교하여 보면 다음과 같은 성질을 가진다는 것을 알 수 있다. s와 $\overline{s}$는 정확하게 2 비트만 동일하다. 이 성질에 의해 노드 ex(s)는 경우 1과 경우 2에서 증명한 노드들인 ex(v)나 ex(w)와 동일하지 않음을 알 수 있다. 그러므로 위의 3가지 경우에서 구성된 경로들은 에지 중복이 없는 경로이므로 밀집율이 1임을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 Folded 하이퍼-스타 FHS$(2n,n)$의 위상적 망성질들을 분석하였다. 먼저, FHS$(2n,n)$이 최대고장허용도를 가짐을 보임으로써, FHS$(2n,n)$의 임의의 노드에서 (분지수-1)개 이하의 고장이 발생해도 FHS$(2n,n)$이 연결되어 있다는 것을 증명했다. 그리고 double rooted 스패닝 트리 DST를 구성하는 방법과 DST를 이용한 방송 수행 시간이 $2n$-1임을 보임으로써, 제안된 방송 기법에 의해 FHS(2n,n) 내의 일-대-다 방송을 효과적으로 수행할 수 있음을 보였고, $HS(2n,n)$에서의 실제 통신 시간을 알 수 있음을 증명하였다. 그리고 FHS$(2n,n)$이 Folded 하이퍼큐브에 연장율 1로 임베딩 가능함을 보였고, Folded 하이퍼큐브가 FHS$(2n,n)$에 연장율 2, 밀집율 1로 임베딩 가능함을 보였다. 이러한 결과는 FHS$(2n,n)$에서 수행 가능한 알고리즘(라우팅, 방송 알고리즘 등)이 Folded 하이퍼큐브에서 효율적으로 이용될 수 있음을 의미하며, Folded 하이퍼큐브에서 수행 가능한 알고리즘(라우팅, 방송, Ascend/Descend 알고리즘 등)을 적은 비용을 추가함으로써 효율적으로 이용될 수 있음을 의미한다.

또한 향후 Folded 하이퍼-스타 FHS$(2n,n)$의 다양한 위상적 망성질(해밀토니안 사이클, 대칭성, 임베딩 등) 분석과 combinatorial 성질 분석 및 다-대-다 방송 기법 등을 분석하는 데 유용한 연구 자료가 될 것이다.

참 고 문 헌

[1] C.-P. Chang, T.-Y. Sung, and L.-H. Hsu, "Edge Congestion and Topological Properties of Crossed Cubes," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, vol.11, no.1, pp.64-80, 2000.

[2] E. Cheng and L. Liptak, "Structural properties of

hyper-stars," Ars Combinatoria, vol.80, pp.65-73, 2006.

[3] E. Cheng and M. Shah, "A strong structural theorem for hyper-stars," Congressus Numerantium, vol.179 pp.181-191, 2006.

[4] K. Efe, "A Variation on the Hypercube with Lower Diameter," IEEE Trans. Computers, vol.40, no.11, pp.1312-1316, 1991.

[5] A. H. Esfahanian, L. M. Ni and B. E. Sagan, "The Twisted N-Cube with Application to Multiprocessing," IEEE Trans. Computers, vol.40, no.1, pp.88-93, 1991.

[6] J. Fan, X. Lin, and X. Jia, "Optimal Path Embedding in Crossed Cubes," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, vol.16, no.12, pp.1190-1200, 2005.

[7] S.-Y. Hsieh and N.-W. Chang, "Hamiltonian Path Embedding and Pancyclicity on The Mobius Cube with Faulty Nodes and Faulty Edges," IEEE Trans. Computers, vol.55, no.7, pp.854-863, 2006.

[8] S. L. Johnsson, "Communication Efficient Basic Linear Algebra Computations on Hypercube Architectures," J. Parallel and Distributed Computing, vol.4, pp.133-172, 1987.

[9] J.-S. Kim, E. Oh, H.-O. Lim, and Y.-N. Heo, "Topological and communication aspects of hyper-star graphs," Lecture Notes in Computer Science 2869, pp. 51-58. 2003.

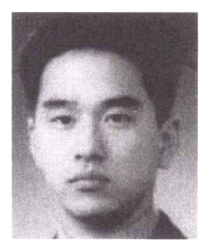
[10] J. Kim and K-G. Shin, "Operationally Enhanced Folded Hypercubes," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, vol.5, no.12, pp.1310-1316, 1994.

[11] J. M. Kumar and M. Patnaik, "Extended Hypercube: A Hierarchical Interconnection Network of Hypercubes," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, vol.3, no.1, pp.45-57, Jan. 1992.

[12] C.-N. Lai, G.-H. Chen, and D.-R. Duh, "Constructing One-to-Many Disjoint Paths in Folded Hypercubes," IEEE Trans. Computers, vol.51, no.1, pp.33-45, 2002.

[13] H.-O. Lee, J.-S. Kim, E. Oh, H.-S. Lim, "Hyper-Star Graph: A New Interconnection Network Improving the Network Cost of the Hypercube," Lecture Notes in Computer Science 2510, pp.858-865, 2002.

[14] N. F. Tzeng and S. Wei, "Enhanced Hypercube," IEEE Trans. Computers, vol.40, no.3, pp.284-294, 1991.



김 종 석

e-mail : rockhee7@gmail.com

1995년 2월 순천대학교 전자계산학과 (학사)

2001년 2월 순천대학교 컴퓨터과학과 (이학석사)

2004년 8월 순천대학교 컴퓨터과학과 (이학박사)

2007년~현재 오클라호마 주립대학교 컴퓨터과학과 박사후연구원

관심분야 : 병렬 및 분산처리 알고리즘, 그래프이론, 상호연결망, 계산이론